

## Απειροστικός ΙΙΙ – Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

**Άσκηση 1.** Επιβεβαιώστε το θεώρημα Green για τις ακόλουθες συναρτήσεις και χωρία:

(i)  $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $P(x, y) = \sin x$ ,  $Q(x, y) = \cos y$ .

(ii)  $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ,  $P(x, y) = xy^2$ ,  $Q(x, y) = -yx^2$ .

**Άσκηση 2.** Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C y dx - x dy,$$

όπου  $C$  είναι περιφέρεια του τετραγώνου  $[-1, 1]^2$  με προσανατολισμό αντίθετα της φοράς των δειχτών του ρολογιού.

**Άσκηση 3.** Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy, \quad f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad D = \{(x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Αλλάζει το αποτέλεσμα αν το  $D \subset \mathbb{R}^2$  είναι γενικό χωρίο για το οποίο ισχύει το θεώρημα Green;

**Άσκηση 4.** Επιβεβαιώστε το θεώρημα Stokes για

$$S = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}, \quad \partial S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}, \quad F(x, y, z) = (z, x, 2zx + 2xy),$$

όπου η  $S$  έχει τον προσανατολισμό γραφήματος.

**Άσκηση 5.** Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot n dA, \quad F = (y, -x, zx^3y^2), \quad S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\},$$

όπου  $n$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της  $S$  που δείχνει προς το  $(0, 0, 0)$ .

**Άσκηση 6.** Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS, \quad F = (2yz, -x + 3y + 2, x^2 + z), \quad S = \{x^2 + y^2 = 4, z \in [-1, 1]\}.$$

Το ίδιο για  $\tilde{S} = S \cup \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(x, y, -1) : x^2 + y^2 \leq 4\}$  στη θέση της  $S$  από πάνω.